Prof. Dr. Armin Iske
Dr. Andreas Vollmer
M.Sc. Lars Poppe

Fachbereich Mathematik
Universität Hamburg
Wintersemester 2022/23

Übungen zu Analysis 1

Aufgaben des Tages 6 — 3. November 2022

Aufgabe 1: *(5 Punkte)* Sei X eine nichtleere Menge. Zeige, dass eine Funktion

$$d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$$

genau dann eine Metrik auf X ist, wenn die folgenden Eigenschaften erfüllt sind.

(a) $\forall\, u, v \in X :\ d(u,v) = 0 \iff u = v$,

(b) $\forall\, u, v, w \in X :\ d(u,v) \leq d(w,u) + d(v,w)$.

Aufgabe 2: *(5 Punkte)* Auf $\mathbb{R}^2$ ist der *euklidische Abstand* $d_2 : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$d_2(x,y) := \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2} \qquad \text{für } x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Zeige, dass die Abbildung $d : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, definiert durch

$$d(x,y) := \begin{cases} d_2(x,y) & \text{falls } y = tx \text{ für ein } t \in \mathbb{R}, \\ d_2(x,0) + d_2(0,y) & \text{sonst,} \end{cases}$$

eine Metrik auf $\mathbb{R}^2$ definiert.

Ausgabedatum: 3. November 2022 **Abgabetermin:** 7. November 2022, 10:00 Uhr.